# *Über symmetrische Functionen, welche zur Darstellung gewisser physikalischer Verhältnisse krystallisirter Körper dienen können.*

Von Dr. J. Grailich.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 9. December 1858.)

1. Bei Gelegenheit einer Untersuchung über die Elasticitätsverhältnisse tesseraler Krystalle wurde ich veranlasst einen Ausdruck für die Grösse der Cohäsion als Function der Richtung der Zugkraft aufzusuchen. Man kann allerdings annehmen, dass im ersten Moment der Verschiebung eines Molecüles des tesseral krystallisirten Systems ein gleicher Widerstand auftritt, die Verschiebung mag nach welcher Richtung immer veranlasst werden, so wie aber die Verschiebung einen gewissen sehr kleinen Betrag, der immer noch zwischen die Grenzen der vollkommenen Elasticität fallen kann, überschreitet, werden die geweckten inneren Widerstände von der Richtung des Impulses abhängig werden müssen. Denn die Cohäsion hört auf zu bestehen, sobald der Ausdruck der Distanz zweier Molecüle eine messbare Grösse erlangt, wodurch der Werth der Anziehungsfunction gleich Null wird [1]; die Cohäsion ist aber, wie es die Spaltbarkeit tesseraler Krystalle beweist, nicht nach allen Richtungen hin gleich gross: es

---

[1] Dies folgt aus der bekannten Definition der Molecularkräfte. Es scheint aber, dass die Kraft, mit der die ponderablen Molecüle auf einander wirken, durch eine Reihe von der Form $S\frac{A_n}{r^n}$ ausgedrückt werden muss, in welcher auch die $A_n$ für niedrige Werthe von $n$ von der Nulle verschieden bleiben. Es ist schon oft angeführt worden, dass das Glied der zweiten Ordnung wegen der allgemeinen Schwere nicht fehlen kann. Weitere, unabweisbare Gründe, scheinen in folgenden bekannten Thatsachen zu liegen.

1. Krystalle zeigen sehr häufig eine ringsum regelmässig ausgebildete Form, indem an analogen Ecken und Kanten dieselben Facetten, oft in ganz gleicher Entwickelung, auftreten. Molecularkräfte, welche nur auf unmerkbare Distanzen hin wirksam sind, können diese Gleichheit der Verhältnisse nicht bedingen. Alle bisherigen Erklärungsversuche umgehen diese Frage, statt ihre Lösung zu versuchen.

muss daher die Anordnung und Beschaffenheit der Molecüle eine solche sein, dass für eine und dieselbe Verschiebung nach verschiedenen Richtungen verschiedene Kräfte erforderlich werden.

Denken wir uns eine Kugel aus Flussspath. Wird sie in passender Weise aufgehängt und werden Gewichte angebracht bis sie zerreisst, so wird die Grösse des Gewichtes, das zum Zerreissen nothwendig ist, wesentlich durch die Richtung bedingt, nach welcher der Angriff geschieht. Gewiss aber wird ein gleiches Gewicht nothwendig sein für jede krystallographisch gleichwerthige Richtung und es werden die kleinsten Gewichte in der Richtung der Normalen der Oktaëderflächen, die grössten in der Richtung der Normalen der Hexaëderflächen gefordert werden. Da man stetig von einer Richtung zur andern übergehen kann, und jeder eine bestimmte Cohäsion entspricht, so wird es möglich werden die Cohäsionsverhältnisse durch eine krumme Fläche darzustellen, deren Radien den in die Richtung dieser Radien entfallenden, zum Zerreissen erforderlichen Gewichten proportional gesetzt werden können. Es hängt dabei blos von der Grösse dieser Radien ab ob in bestimmten Richtungen überhaupt noch ein Zerreissen möglich bleiben soll; denn es kann geschehen, dass bei einer gewissen Grösse der Cohäsion nach einer bestimmten

---

2. Krystalle derselben Substanz zeigen oft eine verschiedene Ausbildung der einzelnen Flächensysteme, wenn die Umstände, unter welchen die Krystallisation von sich ging, verschiedene sind. Es ist bekannt, in welch' abnormen Formen man Salmiak erhalten kann; dass Kochsalz in Oktaëdern, Alaun in Würfeln gezogen werden kann, wenn die Mutterlauge Borsäure oder Harnsäure enthält; dass die Mineralien bestimmter Localitäten bestimmte Typen aufweisen, die an andern Fundorten nicht wieder vorkommen. Wenn nun die äusseren Umstände, ohne die Substanz zu afficiren, den Habitus der Formentwickelung bedingen können, so ist dies bei der Einheit, welche die Ausbildung des Individuums beherrscht, nur durch ein Zusammenwirken von Kräften denkbar, die auch noch für endliche Distanzen der Angriffspunkte einen angebbaren Werth behaupten.

3. Krystalle von höchst complicirter innerer Structur: Quarz, Aragonit, Cerussit, Strontianit, Alstonit, Witherit, Strontiumplatincyanür u. s. w. zeigen einfache äussere Umrisse. Die Erscheinung bleibt völlig unbegreiflich, so lange der Erklärung nur die Molecularkräfte nach der gewöhnlichen Definition zu Gebote stehen.

Molecularkräfte wurden bisher immer nur in jenen Aufgaben in Erwägung gezogen, wo es sich um die inneren Widerstände handelte, welche durch die Verschiebung eines bestehenden Systems geweckt werden; um aber dies System herzustellen, mussten Kräfte ins Gleichgewicht getreten sein, die von einer ganz andern Ordnung sein können. Es scheint aber dass die Untersuchung in dieser Richtung gegenwärtig noch ganz unangreifbar ist, nachdem das einfachste Problem der Statik der Elasticität sich jeder Lösung entzieht.

Richtung die Componenten derselben nach den Normalen der Spaltungsflächen grösser werden als die Cohäsion in der Richtung dieser Normalen. Daher kommt es z. B. dass Bleiglanz kaum anders als in kubischen Bruchflächen zu zertheilen ist. Die Cohäsionsfläche nähert sich dann ohne Ende einer eckig-kantigen Form.

Beim Flussspath wird die Cohäsionsfläche in den Normalpunkten der Hexaëderflächen durch eine Kugel berührt werden, und zwar wird diese Kugel die Cohäsionsfläche vollkommen umhüllen. Dagegen wird eine zweite Kugel, welche die Cohäsionsfläche in den Normalpunkten der Oktaëderflächen berührt, vollkommen von dieser Fläche eingeschlossen sein.

Indem ich nach der Form einer Gleichung suchte, welche diesen und ähnlichen Bedingungen Genüge leistet, gelangte ich zu Ausdrücken, welche eckige Körper darstellen.

Es haben Fourièr und Doppler sich mit der Lösung ähnlicher Aufgaben beschäftigt; ich glaube, dass die hier mitzutheilende Methode wegen der einfachen Beziehungen, die sie zwischen eckigen und gekrümmten Flächen herstellt und der Leichtigkeit und Allgemeinheit, mit der sie hieher gehörige Aufgaben zu lösen erlaubt, einige eigenthümliche Vortheile darbietet.

2. Da die Gleichungen, welche die beschriebenen Verhältnisse darzustellen geeignet sein sollen, nothwendig homogen und bezüglich der drei rechtwinkligen Coordinatenaxen (die wir uns parallel zu den drei Oktaëderaxen gelegt denken) gleichlautend sein müssen, so wird die allgemeinste Form derselben folgende sein:

$$\mathfrak{A}^{2n} = A\,(x^{2n} + y^{2n} + z^{2n}) + B\,(x^{2(n-1)}\,(y^2 + z^2) + y^{2(n-1)}\,(y^2 + x^2) + z^{2(n-1)}\,(x^2 + y^2)) + \ldots$$

Im einfachsten Falle reducirt sich diese auf

$$r^{2n} = x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} \tag{1}$$

Setzen wir $n = 1$, so haben wir die Gleichung der Kugel; setzen wir dagegen $n = \infty$, so wird es die Gleichung des Würfels, der die Kugel in den Punkten

$$\begin{array}{lll} x = \pm 1 & y = 0 & z = 0 \\ x = 0 & y = \pm 1 & z = 0 \\ x = 0 & y = 0 & z = \pm 1 \end{array}$$

berührt.

Für jeden andern positiven und ganzen Werth von $n$ stellt diese Gleichung eine Fläche dar, die zwischen der Kugel und dem Würfel enthalten ist, und mit beiden die Berührungspunkte beider gemeinschaftlich hat.

Dass $1 = \left(\frac{x^2}{r^2}\right)^\infty + \left(\frac{y^2}{r^2}\right)^\infty + \left(\frac{z^2}{r^2}\right)^\infty$ wirklich die Gleichung des Würfels ist, ergibt sich einfach aus der Erwägung, dass $\frac{x}{r}$ gleich ist $\pm 1$, also $x = \pm r$ für jeden Werth von $y$ und $z$, der kleiner oder gleich $\pm r$ ist. Ebenso ist $y = \pm r$ für jeden Werth von $z$ und $x$, der zwischen $+ r$ und $- r$ entfällt; $z = \pm r$ für jeden Werth von $x$ und $y$ zwischen $+ r$ und $- r$.

Der Radius vector $\rho$ ist ein Maximum für $\pm x = \pm y = \pm z$, d. i.

$$\rho = r \sqrt[2n]{3^{n-1}} = 3^{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} r$$

folglich beim Würfel $\rho = r\sqrt{3}$; er schliesst bei allen zusammengehörigen Flächen einen Winkel mit den 3 Coordinatenaxen ein, dessen Cosinus $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist. Da dies die Neigung der Normalen der Oktaëderflächen ist, so erfüllt offenbar gar keine Gleichung von der Form 1) die beim Flussspath geforderten Bedingungen, denn die Maxima fallen bei ihnen in jene Richtungen, nach welchen die Minima im Flussspath vorkommen. Wohl aber wird 1) die Cohäsionsverhältnisse des Bleiglanzes, des Steinsalzes, kurz aller Krystalle von kubischer Spaltbarkeit repräsentiren.

3. So wie 1) für $n = \infty$ den Würfel, so stellt

$$1 = \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2n} \tag{2}$$

für $n = \infty$ das Parallelepiped dar. Denn es ist $\frac{x}{a} = \pm 1$ für jedes $y$ zwischen $+ b$ und $- b$, und jedes $z$ zwischen $+ c$ und $- c$, u. s. f. Da dies sowohl für ein orthogonales als auch für ein beliebig geneigtes Axensystem gilt, so ist 2) die Gleichung eines jeden Parallelepipeds; sind die Axen gleich geneigt und ist $a = b = c$, so ist es die Gleichung des Rhomboëders.

Da für $n = 1$ die Relation 2) ein Ellipsoid, bezogen auf dessen conjugirte (recht- oder schiefwinklige) Axen darstellt, welches das

Parallelepiped in den Mittelpunkten der Seiten berührt, so liegen sämmtliche durch 2) dargestellte krumme Flächen (vorausgesetzt dass $n$ ganze positive Zahlen bleiben) zwischen dem Ellipsoid und dem Parallelepiped. Man überzeugt sich leicht, dass die Diagonalen des Parallelepipeds die Richtungen der 8 Maxima der Radien vectoren der Flächen bestimmen.

Ebenso zeigt die Discussion der Hauptschnitte die Existenz von grössten Radien vectoren der krummen Schnitte in der Richtung der Diagonalen der Parallelogramme an.

Man kann dieselbe Betrachtungsweise auf die übrigen Flächen der 2. Ordnung ausdehnen und wird finden, dass den Hyperboloiden eigenthümlich gebrochene von Ebenen begrenzte, unendliche Systeme entsprechen. Die Fläche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2\infty} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2\infty} - \left(\frac{z}{c}\right)^{2\infty} = 1$$

stellt die Combination eines rechtwinkeligen Prisma mit zwei gegen einander gewendeten abgestutzten Pyramiden dar; noch complicirter wird die Form, welche dem Hyperboloid à deux nappes zugeordnet ist, wie man sich leicht durch die Discussion oder Construction der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2\infty} - \left(\frac{y}{b}\right)^{2\infty} - \left(\frac{z}{c}\right)^{2\infty} = 1$$

überzeugt.

4. Da ein Polyëder durch eine Ebene in einem Polygon geschnitten wird, so wird

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2n} = 1 \\ x \cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \end{cases} \tag{3}$$

die Gleichung eines solchen Polygons sein, sobald $n = \infty$ ist. Transformirt man die Coordinaten, indem man

$$\begin{aligned} x' &= -\sin\alpha \,.\, x + \cos\beta' \,.\, y + \cos\gamma' \,.\, z \\ y' &= \cos\alpha'' \,.\, x + \cos\beta'' \,.\, y + \cos\gamma'' \,.\, z \\ z' &= \cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z \end{aligned}$$

setzt (d. i. indem man die Normale der Schnittebene als Axe der $Z'$ und die Verbindungslinie des Fusspunktes der Normalen mit der

Richtung der $X$ als $X'$ annimmt), so erhält man als Gleichung des Schnittes

$$\left(\frac{-x' \sin\alpha + y' \cos\alpha'' + p\cos\alpha}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{x' \cos\beta' + y' \cos\beta'' + p\cos\beta}{b}\right)^{2n} + \left(\frac{x' \cos\gamma' + y' \cos\beta'' + p\cos\gamma}{c}\right)^{2n} = 1$$

wozu noch die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\cos\alpha \ \cos\alpha'' + \cos\beta \ \cos\beta'' + \cos\gamma \ \cos\gamma'' &= 0\\
-\cos\alpha'' \sin\alpha + \cos\beta'' \cos\beta' + \cos\gamma'' \cos\gamma' &= 0\\
-\sin\alpha \ \cos\alpha + \cos\beta' \cos\beta + \cos\gamma' \cos\gamma &= 0\\
\cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 &= \cos\alpha^2\\
\cos\alpha''^2 + \cos\beta''^2 + \cos\gamma''^2 &= 1
\end{aligned}$$

treten, aus welchen die Werthe von $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, $\beta'$, $\gamma'$ als Functionen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ erhalten werden. Wird im Exponenten $n = \infty$ gesetzt, so erhalten wir folgende Auflösungen:

$$\frac{-x' \sin\alpha + y' \cos\alpha'' + p\cos\alpha}{a} = \pm 1 \quad \text{so lange} \begin{cases} \dfrac{x' \cos\beta + y' \cos\beta'' + p\cos\beta}{b} = \pm\varepsilon \\ \dfrac{x' \cos\gamma' + y' \cos\beta'' + p\cos\gamma}{c} = \pm\varepsilon' \end{cases}$$

unter $\varepsilon$, $\varepsilon'$ jede beliebige positive Zahl, zwischen 0 und 1, verstanden;

$$\frac{x' \cos\beta' + y' \cos\beta'' + p\cos\beta}{a} = \pm 1 \quad \text{so lange} \begin{cases} \dfrac{-x' \sin\alpha + y' \cos\alpha'' + p\cos\alpha}{a} = \pm\delta \\ \dfrac{x' \cos\gamma' + y' \cos\beta'' + p\cos\gamma}{c} = \pm\delta' \end{cases}$$

unter $\varepsilon_1$, $\varepsilon'_1$ jede beliebige positive Zahl, zwischen 0 und 1, verstanden;

$$\frac{x' \cos\gamma' + y' \cos\beta'' + p\cos\gamma}{c} = \pm 1 \quad \text{so lange} \begin{cases} \dfrac{-x' \sin\alpha + y' \cos\alpha'' + p\cos\alpha}{a} = \pm\varepsilon_2 \\ \dfrac{x' \cos\beta' + y' \cos\beta'' + p\cos\beta}{b} = \pm\varepsilon_2' \end{cases}$$

unter $\varepsilon_2$ und $\varepsilon_2'$ ähnliche Grössen wie $\varepsilon_0$, $\varepsilon_0'$, $\varepsilon_{,}$, $\varepsilon_{,}'$ verstanden.

Die erste Auflösung stellt zwei parallele Gerade dar, die bis zum Durchschnitte mit den beiden anderen Parallelen reichen, deren Gleichungen in der zweiten und dritten Auflösung enthalten sind. Es geht daraus zunächst hervor, dass ein Parallelepiped höchstens einen sechseckigen Schnitt liefern kann; sollten von den

Bedingungen, welche jede Auflösung begleiten, mehrere unmöglich werden, so wird sich die Seitenzahl auf 5, 4 oder 3 reduciren.

5. Als ein einfacheres Beispiel wähle ich die Projection des Schnittes auf die Ebene $XY$. Man erhält aus 3)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2\infty} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2\infty} + \left(\frac{p-ux-vy}{wc}\right)^{2\infty} = 1 \qquad (4)$$

Man hat folgende Auflösungen:

$$\text{a)} \ldots \frac{x}{a} = +1 \text{ so lange } \frac{y}{b} = \varepsilon_0, \frac{p-ua-\varepsilon_0 vb}{wc} = \varepsilon_0{}'$$

$$\frac{x}{a} = +1 \quad " \quad " \quad \frac{y}{b} = \varepsilon_{,}, \frac{p+ua-\varepsilon_{,} vb}{wc} = \varepsilon_{,}{}'$$

wird $\varepsilon_0{}'$ oder $\varepsilon_{,}{}'$ für alle Werthe von $\varepsilon_0$ oder $\varepsilon_{,}$ zwischen 0 und 1 grösser als 1, so ist im ersten Falle die erste, im zweiten die zweite Auflösung unmöglich. Gibt die Annahme $\frac{y}{b} = +1$ ein $\varepsilon_0{}' < 1$, so schneiden sich die Geraden $x=a, y=b$; gibt $\frac{y}{b} = +1$ ein $\varepsilon_{,}{}' < 1$, so schneiden sich die Geraden $x=-a, y=b$; gibt $\frac{y}{b} = -1$ ein $\varepsilon_0{}' < 1$. so schneiden sich die Geraden $x=a, y=-b$; gibt $\frac{y}{b} = -1$ ein $\varepsilon_{,}{}' < 1$, so schneiden sich die Geraden $x=-a, y=-b$;

$$\text{b)} \ldots \frac{y}{b} = +1 \text{ so lange } \frac{x}{a} = \varepsilon_0, \frac{p-ua\varepsilon_0-bv}{wc} = \pm\varepsilon_0{}'$$

$$\frac{y}{b} = -1 \quad " \quad " \quad \frac{x}{a} = \varepsilon_{,}{}', \frac{p-ua\varepsilon_{,}+bv}{wc} = \pm\varepsilon_{,}{}'$$

es lässt sich hier genau dasselbe bemerken, wie bei den zwei vorigen Auflösungen;

$$\text{c)} \ldots \frac{p-ux-vy}{wc} = +1 \text{ so lange } \frac{x}{a} = \varepsilon_0 \qquad \frac{y}{b} = \varepsilon_0{}'$$

$$\frac{p-ux-vy}{wc} = -1 \quad " \quad " \quad \frac{x}{a} = \varepsilon_{,} \qquad \frac{y}{b} = \varepsilon_{,}{}'$$

Das heisst, es werden die Geraden $ux+vy=\mp wc+p$ so lange Bestandstücke des Perimeters liefern, als ihnen durch solche Werthe

von $x$ und $y$ Genüge geleistet werden kann, die zwischen $x = +a$ und $x = -a$, und zwischen $y = +b$ und $y = -b$ enthalten sind. Es kann sein, dass dies entweder für beide oder auch nur für eine Auflösung unmöglich wird; im letzten Falle hört das dritte Glied der Gleichung 4) auf eine geometrische Bedeutung zu haben.

Man kann nun bezüglich der ersten 4 Auflösungen sagen, dass

$x = +a$ unmöglich ist, so lange $(p - ua - \varepsilon vb)^2 > w^2c^2$
$x = -a$ „ „ „ „ $(p + ua - \varepsilon vb)^2 > w^2c^2$
$y = +b$ „ „ „ „ $(p - vb - \varepsilon ua)^2 > w^2c^2$
$y = -b$ „ „ „ „ $(p + vb - \varepsilon ua)^2 > w^2c^2$

ist. Wird $(p - ua \pm \varepsilon vb)^2 = w^2c^2$ für einen gewissen Werth von $\varepsilon$, während es für alle übrigen $> w^2c^2$ bleibt, so wird das Polygon in dem Punkte $x = a$, $y = \pm \varepsilon b$ von der Geraden $x = a$ berührt. Ähnliches gilt an allen übrigen Auflösungen.

Nehmen wir an, es sei $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$; $u = \frac{3}{\sqrt{50}}$, $v = \frac{4}{\sqrt{50}}$, $w = \frac{5}{\sqrt{50}}$; $p = 0$, d. i. die schneidende Ebene gehe durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds. Dann ist

$x = 3$ so lange $\left(\frac{3 \,.\, 3 - \varepsilon \,.\, 8}{5}\right)^2 \overline{\gtrless} 1$, d. i. von $\varepsilon = \frac{1}{2}$ bis $\varepsilon = -1$
also von $y = -1$ bis $y = -2$,

$x = -3$ so lange $\left(\frac{3 \,.\, 3 - 8 \,.\, \varepsilon}{5}\right)^2 \overline{\gtrless} 1$, d. i. von $\varepsilon = \frac{1}{2}$ bis $\varepsilon = 1$
also von $y = +1$ bis $y = +2$,

$y = 2$ so lange $\left(\frac{-2 \,.\, 4 - 9 \,.\, \varepsilon}{5}\right)^2 \overline{\gtrless} 1$, d. i. von $\varepsilon = \frac{1}{3}$ bis $\varepsilon = -1$
also von $x = -1$ bis $x = -3$,

$y = -2$ so lange $\left(\frac{2 \,.\, 4 - 9\,\varepsilon}{5}\right)^2 \overline{\gtrless} 1$, d. i. von $\varepsilon - \frac{1}{3}$ bis $\varepsilon = 1$
also von $x = 1$ bis $x = 3$,

$3x + 4y = -5$ so lange $x^2 < 9$, $y^2 < 4$ ist, d. i. von $x = 1$ bis $x = -3$,

$4x + 4y = +5$ so lange $x^2 < 9$, $y^2 < 4$ ist, d. i. von $x = -1$ bis $x = 3$.

Das Sechseck Fig. 1 wird somit durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{2\infty} + \left(\frac{y}{2}\right)^{2\infty} + \left(\frac{3x - 4y}{5}\right)^{2\infty} = 1$$



dargestellt.

Setzen wir dagegen

$$u = \frac{1}{\sqrt{26}},\ v = \frac{1}{\sqrt{26}},\ w = \frac{-5}{\sqrt{26}},\ p = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

so ist

$x = 3$ so lange $\left(\frac{2(1+\varepsilon)}{5}\right)^2 \overline{\overline{<}}\ 1$, d. i. von $\varepsilon = -1$ bis $\varepsilon = +1$,
also von $y = -2$ bis $y = +2$,

$x = -3$ so lange $\left(\frac{4-2\varepsilon}{5}\right)^2 \overline{\overline{<}}\ 1$, d. i. von $\varepsilon = -\frac{1}{2}$ bis $\varepsilon = +1$,
also von $y = -1$ bis $y = +2$,

$y = 2$ so lange $\left(\frac{1+3\varepsilon}{5}\right)^2 \overline{\overline{<}}\ 1$, d. i. von $\varepsilon = +1$ bis $\varepsilon = -1$,
also von $x = +1$ bis $x = -1$,

$y = -2$ so lange $\left(\frac{3(1-\varepsilon)}{-5}\right)^2 \overline{\overline{<}}\ 1$, d. i. von $\varepsilon = -\frac{2}{3}$ bis $\varepsilon = +1$,
also von $x = -2$ bis $x = +3$,

$x + y = 6$ so lange $(x)^2 < 9$, $(y)^2 < 4$; aber das ist offenbar unmöglich, denn die kleinsten Werthe, deren $x$ und $y$ fähig sind, sind $x = y = 3$; für jedes kleinere $x$ wird $y$ noch grösser, also unmöglich; für jedes kleinere $y$ wird $x > 3$, wird also unmöglich. $x + y = -4$ ist möglich von $x = -2$ bis $x = -3$.

Die Gleichung

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{2\infty} + \left(\frac{y}{2}\right)^{2\infty} + \left(\frac{1 - x - y}{-5}\right)^{2\infty} = 1$$



stellt somit das nebenstehende Fünfeck dar.

6. Es fällt in die Augen, dass die Gleichung des Polygons dadurch entsteht, dass man die Gleichungen der einzelnen Linien, die Bestandstücke des Perimeters liefern, auf die Form $f(x, y) \equiv ax + by = 1$ bringt, und hierauf die einzelnen $f(x, y)$ zur Potenz $2\infty$ erhebt und addirt. Dies wird noch deutlicher durch folgende zwei Beispiele werden.

Setzt man $u = v = p = 0$, so wird 4)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2\infty} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2\infty} = 1$$

dies ist aber offenbar die Gleichung des Parallelogramms.

Transformirt man die Coordinaten, indem man denselben Mittelpunkt beibehält, aber ein schiefwinkliges System einführt, das den Diagonalen des Parallelogramms entspricht, so erhält man

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{2\infty} + \left(\frac{x-y}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{2\infty} = 1$$

Es ist aber $x + y = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ die Gleichung der der früheren Axe $b$ parallelen, $x - y = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ die Gleichung der der früheren Axe $x$ parallelen Seiten.

Geht man von schiefwinkligen Coordinatenaxen aus, so dass die Axen $XY$ einen Winkel von 60° einschliessen, so wird

$$x^{2\infty} + y^{2\infty} + (x+y)^{2\infty} = 1$$

die Projection des Durchschnittes der Ebene

$$x + y + z = 0$$

mit dem gleichseitigen schiefwinkligen Parallelepiped

$$x^{2\infty} + y^{2\infty} + z^{2\infty} = 1$$

sein. Transformirt man dann die Coordinaten so, dass die Axe der $X'$ den Winkel von 60°, die Axe der $Y'$ den Winkel von 120° halbiren, so wird

$$x' = (x+y)\cos 30^0 \qquad y' = (y-x)\sin 30^0$$

folglich

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{\cos 30} + \frac{y'}{\sin 30}\right) \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{x'}{\cos 30} - \frac{y'}{\sin 30}\right)$$

Dies gibt in die Gleichung der Projection substituirt

$$\left[\frac{x}{2\cos 30^0} + \frac{y}{2\sin 30^0}\right]^{2\infty} + \left[\frac{x}{2\cos 30^0} - \frac{y}{2\sin 30^0}\right]^{2\infty} + \left[\frac{x}{\cos 30^0}\right]^{2\infty} = 1$$

Man sieht auf den ersten Blick, dass

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos 30} + \frac{y}{\sin 30}\right) = \pm 1, \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos 30} - \frac{y}{\sin 30}\right) = \pm 1, \frac{x}{\cos 30} = \pm 1$$

die Gleichungen der Geraden sind die ein reguläres Sechseck bilden, und zwar bezogen auf den Radius des umschriebenen Kreises als Lineareinheit.

Dies führt nun zu folgender Methode, die Gleichung eines beliebigen regulären $2n$ Ecks aufzustellen.

7. Es sei $2n$ die Anzahl der Polygonseiten; der Bogen den eine Seite als Sehne vom umschriebenen Kreise abschneidet ist $r\,\frac{\pi}{n}$, folglich die Entfernung der Seite vom Kreismittelpunkt $= r\cos\frac{\pi}{2n}$. Die Gleichungen der einzelnen Polygonseiten sind nun

$$x = r\cos\frac{\pi}{2n}$$

$$x\cos\frac{\pi}{n} + y\sin\frac{\pi}{n} = r\cos\frac{\pi}{2n}$$

$$x\cos\frac{2\pi}{n} + y\sin\frac{2\pi}{n} = r\cos\frac{\pi}{2n}$$

$$\vdots$$

$$x\cos\frac{k\pi}{n} + y\sin\frac{k\pi}{n} = r\cos\frac{\pi}{2n}$$

und die Gleichung des Polygons wird

$$x^{2\infty} + \left(x\cos\frac{\pi}{n} + y\sin\frac{\pi}{n}\right)^{2\infty} + \left(x\cos 2\frac{\pi}{n} + y\sin 2\frac{\pi}{n}\right)^{2\infty} + \ldots$$
$$+ \left(x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + y\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)^{2\infty} = \left(r\cos\frac{\pi}{2n}\right)^{2\infty}$$

oder kurz

$$\mathop{S}_{k=1}^{k=n}\left(\frac{x\cos\frac{(k-1)\pi}{n} + y\sin\frac{(k-1)\pi}{n}}{r\cos\frac{\pi}{2n}}\right)^{2\infty} = 1$$

Die Gleichung des Quadrats ist somit

$$\left(\frac{x}{r\cos 45^0}\right)^{2\infty} + \left(\frac{y}{r\cos 45^0}\right)^{2\infty} = 1$$

die des Sechsecks:

$$\left(\frac{x}{r\cos 30}\right)^{2\infty} + \left(\frac{x\cos 60 + y\sin 60}{r\cos 30}\right)^{2\infty} + \left(\frac{-x\cos 60^0 + y\sin 60}{r\cos 30}\right)^{2\infty} = 1$$

u. s. f. Man würde endlich auf diesem Wege fortfahrend zur Gleichung des Kreises

$$\lim_{n=\infty} \underset{k=1}{\overset{k=\frac{n}{2}}{S}} \left( \frac{x \cos \frac{(k-1)\pi}{n} + y \sin \frac{(k-1)\pi}{n}}{r \cos \frac{\pi}{2n}} \right)^{2\infty} = 1$$

gelangen.

Für die Seitenzahl $(2n + 1)$ wird eine kleine Veränderung nothwendig. Denn hat man zwei Parallele

$$ux + vy = p$$
$$ux + vy = p'$$

so kann $p'$ so gewählt werden, dass es eine unmögliche Lösung gibt. Man erhält dies dadurch, dass $p = \pi_1 - \pi_2$ und $p' = \pi_1 + \pi_2$ gesetzt wird. Dann wird

$$\frac{ux + vy - \pi_1}{\pi_2} = -1, \quad \frac{ux + vy - \pi_1}{\pi_2} = 1$$

folglich $$\left(\frac{ux + vy - \pi_1}{\pi_2}\right)^2 = 1.$$

Bei einem unregelmässigen Polygon wird die Gleichung die Form

$$\left(\frac{u_1x + v_1y + a_1}{p_1}\right)^{2\infty} + \left(\frac{u_2x + v_2y + a_2}{p_2}\right)^{2\infty} + \ldots + \left(\frac{u_nx + v_ny + a_n}{p_n}\right)^{2\infty} = 1$$

annehmen.

8. Setzt man allgemein $\varphi_k$ für die Function $\varphi_k(xy)$, so wird in der Gleichung

$$\varphi_0^{2\infty} + \varphi_1^{2\infty} + \varphi_2^{2\infty} + \ldots + \varphi_n^{2\infty} = 1$$

das Glied $\varphi_k$ einen Theil des Perimeters einer eckigen (aus gerad- oder krummlinigen Elementen zusammengesetzten) Linie darstellen, wenn die Gleichung

$$\varphi_k = \pm 1$$

durch solche Werthe von $x$ und $y$ erfüllt wird, welche in jede andere der Functionen $\varphi$ substituirt, diese kleiner oder gleich 1 machen. Denn so lange $\varphi < 1$ ist, wird $\varphi^\infty = 0$; ist aber $\varphi = \pm 1$, so ist, wenn $r$ solche Glieder vorhanden sind,

$$r \, . \, \varphi^{\infty} = 1 \qquad \varphi = r^{-\frac{1}{\infty}} = 1$$

Es ist klar, dass $\varphi$ nicht blos eine gerade Linie bedeuten muss. Denn auch die Gleichung

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{r^2}\right)^{\infty} + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{\infty} = 1$$

gibt eine mögliche Lösung so lange $a < r$ ist; es stellt dies eine aus zwei Kreisbögen und zwei Geraden zusammengesetzte gebrochene Linie dar, welche nach den Coordinatenrichtungen symmetrisch ist, indem sie auch in der Form

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}\right)^{2\infty} + \left(\frac{x}{a}\right)^{2\infty} = 1$$

geschrieben werden kann.

Man kann daher nach der in diesem Paragraph angegebenen Methode eben so gut krumm- als geradlinige Polygone darstellen; dabei kann das Polygon eine geschlossene oder offene Form haben, je nachdem der Exponent $2\infty$ oder $\infty$ ist.

Führt man Polarcoordinaten ein, so reducirt sich die Aufgabe auf die Ermittlung des Minimum der Radien vectoren für jede gegebene Richtung und die Curve, welche durch die betreffende Gleichung dargestellt wird, ist der geometrische Ort der Endpunkte dieser kleinsten Radien vectoren.

9. Aus dem bisherigen folgt, dass die Curve

$$\varphi_0^{2n} + \varphi_1^{2n} + \varphi_2^{2n} + \ldots \varphi_k^{2n} = 1$$

sich immer enger an das Polygon

$$\varphi_0^{2\infty} + \varphi_1^{2\infty} + \varphi_2^{2\infty} + \ldots \varphi_k^{2\infty} = 1$$

anschliesst, je höher der Exponent $n$ wird. Diess gibt ein Kennzeichen durch welches die Hauptform einer Curve aus den Coëfficienten ihrer Gleichung ermittelt werden kann. Es sei

$$A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} y + A_2 x^{2n-2} y^2 + \ldots + A_{2n-1} x \, y^{2n-1} + A_{2n} y^{2n} = 1$$

Ist es nun möglich die Coëfficienten folgendermassen zu zerlegen, dass

$$A_0 = a_0^{2n} + a_1^{2n} + \dots + a_k^{2n}$$
$$A_1 = \binom{2n}{1}[a_0^{2n-1}b_0 + a_1^{2n-1}b_1 + \dots + a_k^{2n-1}b_k]$$
$$A_2 = \binom{2n}{2}[a_0^{2n-2}b_0^2 + a_1^{2n-2}b_1^2 + \dots + a_k^{2n-2}b_k^2]$$
$$\vdots$$
$$A_{2n-1} = \binom{2n}{2n-1}[a_0 b_0^{2n-1} + a_1 b_1^{2n-1} + \dots + a_k b_k^{2n-1}]$$
$$A_{2n} = b_0^{2n} + b_1^{2n} + \dots + b_k^{2n}$$

so wird die Gleichung 5) in die Form

$$(a_0 x + b_0 y)^{2n} + (a_1 x + b_1 y)^{2n} + \dots + (a_k x + b_k y)^{2n} = 1$$

zu bringen sein, welche für $n = \infty$ ein $2k$ Eck darstellt. Die Curve 7) wird daher in der Hauptform mit einem $2k$ Eck übereinstimmen, in welches ein Kreis sich einschreiben lässt. Was für das $2k$ Eck gilt, lässt sich auch für ein Polygon von ungerader Seitenzahl oder für Curven, die aus hyperbolischen Ästen bestehen, darthun. Es ist aber nicht die Absicht der gegenwärtigen Note auf diesen Gegenstand näher einzugehen.

Wird auch die Discussion einer gegebenen Gleichung unter dem hier angegebenen Gesichtspunkt viele Schwierigkeiten darbieten, so wird es um so leichter einen algebraischen Ausdruck anzugeben, der eine Curve repräsentirt, die sich beliebig nahe an ein reguläres oder symmetrisches $2k$ Eck anschliesst.

Man braucht nur in der Gleichung des $2k$ Ecks statt des Exponenten $\infty$ eine endliche positive ganze Zahl zu setzen, und erhält die verlangte Gleichung.

So wird das Quadrat die Grenze aller Formen angeben, die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2n} = 1$$

dargestellt werden. Die Diagonalrichtung des Quadrates ist durch die Gleichung $x \pm y = 0$ gegeben; diese Linie geht zugleich durch die Punkte grösster Krümmung dieser Curven, denn führt man ein Polar-Coordinatensystem ein, so findet sich der grösste Radius vector für den Winkel von 45° mit der als Polaraxe gewählten Axe $A, X$. Nun ist

$$x = y = a^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

folglich $\rho^2 = 2x^2$ und es wird für das in den Kreis von Radius 1 eingeschriebene Quadrat, wenn

$$\begin{array}{ll} n = 1 & \rho = 0{\cdot}7071 \\ n = 2 & \rho = 0{\cdot}8089 \\ n = 3 & \rho = 0{\cdot}8909 \\ n = 4 & \rho = 0{\cdot}9170 \\ n = 5 & \rho = 0{\cdot}9330 \\ n = \infty & \rho = 1 \end{array}$$

Wollte man dasselbe Verfahren anwenden, um die Gleichung des Dreiecks zu erhalten, so würde sich unmittelbar keine passende Lösung zeigen. Denn die Gleichung

$$f_1^n + f_2^n + f_3^n = 1$$

stellt für endliche Werthe von $n$, wenn $n$ gerade ist, eine symmetrisch sechseckige Curve, wenn aber $n$ ungerade ist, ein System von drei hyperbolischen Curven dar, deren Scheitel an Krümmung mehr und mehr abnehmen. Dasselbe würde man für eine beliebige Anzahl von Gliedern der Gleichung finden.

Man kann aber immer auch eine Gleichung für das Dreieck, Fünfeck u. s. f. angeben, sobald man nach §. 7 den Coordinatenmittelpunkt für jede einzelne Seite in der Art transformirt, dass von den zwei durch eine gerade Potenz gelieferten Geraden nur die eine eine mögliche Lösung darbietet. So ist z. B.

$$x^{2n} + y^{2n} + (1 - x - y)^{2n} = 1$$

die Gleichung eines rechtwinkligen Dreiecks, sobald $n = \infty$ wird und einer Curve, die sich ohne Ende der Form des rechtwinkligen Dreiecks nähert, wenn $n$ ohne Ende wächst.

10. Es wird nunmehr nicht schwer, das von Polygonen ausgesagte auch auf Polyëder anzuwenden. Denn es stellt offenbar

$$\varphi_0(xyz)^{2\infty} + \varphi_1(xyz)^{2\infty} + \varphi_2(xyz)^{2\infty} + \ldots + \varphi_k(xyz)^{2\infty} = 1$$

einen von Flächen beliebiger Ordnung ganz oder theilweise umschlossenen Raum dar, dessen Begrenzung der Bedingung Genüge leistet, dass der Radius vector an jedem Punkte derselben der kleinstmögliche ist. Die Auflösung

$$\varphi_0(xyz) = \pm 1$$

fordert dass alle andern $\varphi$ für die dieser Auflösung entsprechenden Coordinaten kleiner oder gleich $\pm 1$ werden. Werden mehrere $\varphi$ für gleiche Coordinaten $= \pm 1$, so haben wir einen Eckpunkt; werden nur zwei $\varphi$ für dieselben Coordinaten $= \pm 1$, so erhalten wir eine Kante.

Soll z. B. die Gleichung derjenigen Oberfläche angegeben werden, welche den sechs Kugeln gemeinsamen Raum umschliesst, deren Radien sämmtlich gleich $r$ und deren Mittelpunkte symmetrisch um einen Punkt im Raume angeordnet sind, so hat man

$$\varphi_0 = \frac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{r^2}, \quad \varphi_1 = \frac{(x-a)^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

$$\varphi_2 = \frac{x^2 + (y+a)^2 + z^2}{r^2}$$

u. s. f., folglich die gesuchte Gleichung

$$\left[\frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}}{r^2}\right]^{2\infty} + \left[\frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}{r^2}\right]^{2\infty} +$$
$$+ \left[\frac{\sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z^2}}{r^3}\right]^{2\infty} + \left[\frac{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}}{r^2}\right]^{2\infty} +$$
$$+ \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}}{r}\right]^{2\infty} + \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}{r}\right]^{2\infty} = 1$$

Setzt man auch hier $n$ nicht $\infty$, sondern 2, 3, 4. . . . so nähert man sich der verlangten Form ohne Ende, durch eine Anzahl krummer Flächen.

Man kann nach dieser Methode leicht die Gleichung einer jeden Krystallform angeben, diese mag einfach oder combinirt sein.

Es seien $f_1 = 1, f_2 = 1 \ldots f_k = 1$ die Gleichungen der einzelnen Krystallflächen und zwar in ähnlicher Entfernung vom Coordinatenmittelpunkte, wie es der Beobachtung entspricht, so ist

$$f_1^{2\infty} + f_2^{2\infty} + f_3^{2\infty} + \ldots + f_k^{2\infty} = 1$$

die Gleichung der Combination und zwar in beliebiger Verziehung. Soll z. B. die Combination des Oktaëders mit dem Dodekaëder und Hexaëder angegeben werden, bei vorherrschenden Oktaëderflächen, so wird, da

$$\Phi = \left(\frac{x+y+z}{a}\right)^{2\infty} + \left(\frac{-x+y+z}{a}\right)^{2\infty} + \left(\frac{x-y+z}{a}\right)^{2\infty} + \left(\frac{-x-y+z}{a}\right)^{2\infty} = 1$$

die Gleichung des Oktaëders von der Axenlänge $a$,

$$X = \left(\frac{x+y}{b}\right)^{2\infty} + \left(\frac{x-y}{b}\right)^{2\infty} + \left(\frac{y+z}{b}\right)^{2\infty} + \left(\frac{y-z}{b}\right)^{2\infty} + \left(\frac{z+x}{b}\right)^{2\infty} + \left(\frac{z-x}{b}\right)^{2\infty} = 1$$

die Gleichung des Dodekaëders von der Axenlänge $b$ und

$$\Psi = \left(\frac{x}{c}\right)^{2\infty} + \left(\frac{y}{c}\right)^{2\infty} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2\infty} = 1$$

die Gleichung des Hexaëders von der Axenlänge $c$ ist, die Gleichung der verlangten Combination

$$\Phi + X + \Psi = 1$$

sein. Von der relativen Länge von $a$, $b$, $c$ hängt dies Vorherrschen der einen oder andern Form ab; natürlich muss unter allen Umständen $c < b < a$ sein.

Diese Darstellung gilt für alle Systeme. Man sieht, dass es nicht schwer fallen kann den Schnitt einer beliebigen Ebene mit einer beliebigen Krystallcombination durch Rechnung zu bestimmen.

11. Es ist nun auch die im ersten Paragraph erwähnte Aufgabe zu lösen. Da im Flussspath die Cohäsionsverhältnisse die Symmetrie des Oktaëders aufweisen, so wird die Cohäsionsfläche von der Form

$$(x+y+z)^{2n} + (-x+y+z)^{2n} + (x-y+z)^{2n} + (-x-y+z)^{2n} = 1$$

sein. Setzen wir $n = 2$, so gibt dies als erste Approximation

$$z^4 + y^4 + z^4 + 6\,(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) = \frac{1}{4}$$

Die Spaltbarkeit des Flussspathes ist so ausgezeichnet, dass gewiss ein höherer Werth von $n$ der Wahrheit mehr entsprechen wird; dagegen ist zu erwarten, dass die Cohäsionsverhältnisse des Alauns mit ziemlicher Genauigkeit durch diese Gleichung dargestellt werden.

Granat und Blende lassen sich nach den Flächen des Dodekaëders spalten. Die Cohäsionsfläche ist daher von der Form

$$(x+y)^{2n} + (x-y)^{2n} + (y+z)^{2n} + (y-z)^{2n} + (z+x)^{2n} + (z-x)^{2n} = 1$$

was als erste Approximation

$$x^4 + y^4 + z^4 + 3\,(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) = \frac{1}{2}$$

gibt. Da sich die beiden Gleichungen für oktaëdrisch- und dodekaëdrisch spalthare Krystalle nur durch die Constanten unterscheiden, so ist es wohl nothwendig zu höheren Zahlen für $n$ aufzusteigen, sobald es sich um eine schärfere Unterscheidung handelt.

Es ist leicht diese Betrachtungsweise auf alle übrigen Systeme auszudehnen.

Diese Gleichungen geben nun auch ein Mittel an die Hand die Formen von Differentialgleichungen höherer Ordnung zu errathen, welche zur Darstellung der Bewegungserscheinungen dienen können, in welchen die Verschiebungen nicht mehr unendlich klein gesetzt werden.

12. Nach bekannten Beobachtungen (s. meine Bearbeitung der Miller'schen Krystallographie, S. 226) steht die Härte in einem einfachen reciproken Verhältnisse zur Spaltbarkeit. Die weichsten Flächen sind die Spaltungsflächen und die Härte nimmt zu mit der Neigung der Flächen gegen die Spaltungsrichtungen.

Es scheint darum, dass die Cohäsionsflächen unmittelbar dazu dienen können, die Härtegrade der verschiedenen Flächen eines und desselben Krystalles anzugeben. Es sind zwar vom Kalkspath bereits ziemlich viele Bestimmungen bekannt; ich bereite aber eine neue umfassendere Untersuchung einer Kalkspathkugel vor. Die Schwierigkeit eine solche in den passenden Dimensionen zu erhalten, und ihr den nöthigen Schliff zu verleihen, hat bisher die Arbeit verzögert. Jedenfalls aber wird es leichter sein die Cohäsionsverhältnisse auf diesem indirecten Wege zu entwickeln, als auf directem durch die Anwendung von Gewichten.

Die Thatsache, dass Krystalle auf derselben Fläche verschiedene Härten zeigen, je nachdem sie nach verschiedenen Richtungen geritzt werden, ist durch die Cohäsionsfläche deutlich angezeigt. Denn wenn die ritzende Spitze von härteren zu weicheren Flächen, d. i. von kleineren zu grösseren Radien vectoren der Cohäsionsfläche fortschreitet, muss die beobachtete Härte nothwendig eine andere sein, als wenn die Spitze den umgekehrten Weg geht.

Es ist bisher weder die Anziehung eckiger Körper, noch auch die Vertheilung der Elektricität auf Würfeln, Pyramiden u. dgl. Flächen mit Genauigkeit zu berechnen gewesen. Zwar sollte die

Elektricität auf einem Würfel aus vollkommen leitendem Materiale überhaupt nicht bestehen können, sondern in unmessbar kurzer Zeit durch die Kanten und Ecken entweichen. Dass sie trotzdem beobachtet wird zeigt, dass überhaupt keine absoluten Kanten und Ecken herzustellen sind. Es ist zu erwarten, dass die Form der Gleichung, welche es erlaubt krumme Flächen anzugeben, die sich bis zu jedem beliebigen Grade eckigen Körpern nähern, zur Lösung dieser Aufgabe sich nützlich erweisen wird.

13. Die Function

$$\left[\sin\,(2q+1)\,\frac{\pi}{2}\right]^{2\infty}$$

ist Null für alle gebrochenen, dagegen gleich 1 für alle ganzen, positiven oder negativen, Werthe von $q$. Es wird somit

$$\xi = \mathfrak{a}p\left[\sin\,(2p+1)\,\frac{\pi}{2}\right]^{2\infty}$$

für $\qquad p = \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3 \ldots.$

den Werth $\qquad p = \pm \mathfrak{a} \quad \pm 2\mathfrak{a} \quad \pm 3\mathfrak{a} \ldots.$

erlangen. Die Gleichung stellt ein System von Ebenen dar, die zur Coordinatenebene $YZ$ parallel sind und nach gleichen Intervallen $\mathfrak{a}$ auf einander folgen. Ebenso werden die Gleichungen

$$\eta = \mathfrak{b}p\left[\sin\,(2\,p+1)\,\frac{\pi}{2}\right]^{2\infty}$$

$$\zeta = \mathfrak{c}p\left[\sin\,(2\,p+1)\,\frac{\pi}{2}\right]^{2\infty}$$

Systeme von Ebenen darstellen, die parallel zur Coordinatenebene $XZ$ und $XY$ in gleichen Intervallen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ auf einander folgen.

Es sei nun $Q$ eine beliebige Function der Coordinaten $x, y, z$. Nehmen wir an es werde $Q$ auf ein anderes Coordinatensystem bezogen, das mit dem ursprünglichen parallel bleibt, dessen Ursprung aber um die Grössen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ verschoben werde. Es wird dann

$$Q = F\,(x-\xi,\, y-\eta,\, z-\zeta).$$

Sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$ nicht beliebige Grössen, sondern wird von ihnen gefordert, dass sie die Gleichungen

$$\frac{\xi}{\mathfrak{a}p\left[\sin(2p+1)\,\frac{\pi}{2}\right]^{2\infty}} = \frac{\eta}{\mathfrak{b}p\left[\sin(2p+1)\,\frac{\pi}{2}\right]^{2\infty}} = \frac{\zeta}{\mathfrak{c}p\left[\sin(2p+1)\,\frac{\pi}{2}\right]^{2\infty}} = 1$$

erfüllen, so ist $Q$ nicht mehr eine einzelne Fläche, sondern ein System von Flächen, deren analoge Punkte im Raume nach gleichen Intervallen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nach den drei Coordinatenrichtungen auf einander folgen. So wird

$$\left[\left(\frac{x - \mathfrak{a}p\left[\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}\right]^{2\infty}}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - \mathfrak{b}p\left[\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}\right]^{2\infty}}{b}\right)^2 + \left(\frac{z - \mathfrak{c}p\left[\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}\right]^{2\infty}}{c}\right)^2 = 1\right]_{p=p'}^{p=p''}$$

ein System von gleichen und ähnlichen Ellipsoiden darstellen, deren Mittelpunkte nach der Richtung der $X$ um $\mathfrak{a}$, nach der Richtung der $Y$ um $\mathfrak{b}$, nach der Richtung der $Z$ um $\mathfrak{c}$ von einander abstehen. Ist $\mathfrak{a} = 2a$, $\mathfrak{b} = 2b$, $\mathfrak{c} = 2c$, so wird jedes Ellipsoid an den Endpunkten der Axen von benachbarten Ellipsoiden tangirt. Ist $a = b = c = r$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, so erhalten wir ein System von Kugeln vom Halbmesser $r$, deren Mittelpunkte nach den Coordinatenrichtungen in den Abständen $\mathfrak{a}$ auf einander folgen; ist $r = 0$, so reducirt sich die Gleichung auf ein System von Punkten.

Würde der Exponent der einzelnen Glieder nicht gleich 2, sondern gleich $2n$ gesetzt, so erhielte man ein System von Flächen, deren Hauptform zwischen dem Ellipsoid und Parallelepiped enthalten ist. Für $n = \infty$ wird es ein System an Parallelepipeden.

Da die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ selbst Functionen des Raumes und der Zeit sein können, so ist es möglich in dieser Weise ein System darzustellen, dessen Elemente nach einem beliebigen Gesetze im Raume vertheilt sein können. Wäre z. B. $Q$ für $\xi = \eta = \zeta = 0$ die Gestalt eines Molecüls, so würde $Q$ als Function von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ mit variablen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ein System darstellen wie die elastischen ungleichartig gedehnten Körper u. dgl.

Die Unabhängigkeit der Zonen und des Krystallsystems von der Temperatur, so wie die Spaltbarkeit deuten darauf hin, dass in Krystallen die Anordnung der Massenmittelpunkte der Molecüle eine solche ist, dass sie genöthigt sind immerfort in einer der (wirklichen oder möglichen) Krystallebenen zu bleiben. Man erhält dadurch Bestimmungsgleichungen zur Auswerthung der $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ als Functionen der Krystallconstanten bei irgend einer Ausgangstemperatur, der Wärmecapacität und der Temperaturen.